



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY
B.Sc. General PART-I Examinations, 2016

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-I

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণ মান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর দাও।

All symbols are of usual significance.

Group-A

বিভাগ-ক

Full Marks: 25

Answer Question No. 1 and any two questions from the rest.

১ নং প্রশ্ন ও যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

1. (a) Answer any one question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) State De Moivre's Theorem for a positive integral index.

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য ডি' ময়ভারের উপপাদ্যটি বিবৃত কর।

(ii) Find $\phi(-2)$ and $\phi(3)$ if $\phi(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

যদি $\phi(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ হয়, তবে $\phi(-2)$ ও $\phi(3)$ এর মান কত হবে?

(iii) Justify the statement – 'If two rows of a determinant are identical then the determinant vanishes?'

'যদি কোন ডিটারমিন্যান্টের দুটি সারি অভিন্ন হয়, তবে তার মান শূন্য হয়'- বিবৃতিটি যাচাই কর।

(b) Answer any *one* question from the following:

3×1=3

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) Diminish the roots of the equation $x^3 - 9x^2 + 28x - 27 = 0$ by 3.

উপরের সমীকরণটির বীজগুলিকে 3 দ্বারা হ্রাস কর।

(ii) If $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$, then find $\frac{1}{z}$.

যদি $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ হয়, তবে $\frac{1}{z}$ কত হবে?

(iii) Prove without expanding, that

বিন্যাস না করে প্রমাণ কর যে

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. (a) Find the modulus and amplitude of

4+3-

মডিউলাস এবং অ্যামপ্লিটিউড নির্ণয় কর

$$\frac{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^5}{(\cos \theta + i \sin \theta)^6}.$$

(b) Find the values of $i^{\frac{2}{3}}$ by De Moivre's theorem.

ডি-ময়ভারের উপপাদ্যের সাহায্যে $i^{\frac{2}{3}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) If $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$, then show that $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$

3. (a) If one root of the equation $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ is $2 - \sqrt{3}$, find the other roots.

4+2-

যদি $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 2 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ $2 - \sqrt{3}$ হয়, তবে অন্যবীজগুলি নির্ণয় কর।

(b) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + 5x^2 + 1 = 0$, find the value of

$$\sum \frac{1}{\alpha}$$

যদি α, β, γ উপরের সমীকরণটির তিনটি বীজ হয়, তবে $\sum \frac{1}{\alpha}$ এর মান কত?

(c) If the equation $x^3 - rx^2 + rx - 4 = 0$ has two roots reciprocal to each other, find the third root and the value of r .

যদি $x^3 - rx^2 + rx - 4 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজ পরস্পরের অন্যান্যক হয়, তবে তৃতীয় বীজটি ও r এর মান নির্ণয় কর।

4. (a) Show that $x = a + b + c$ is a solution of the equation. 5+5

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = 0$$

দেখাও যে, $x = a + b + c$ উপরের সমীকরণের একটি সমাধান হবে।

(b) Solve by Cramer's Rule

Cramer এর সূত্র দ্বারা সমাধান কর

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$3x + 2y + 9z = 14$$

4 5. (a) Express $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric 6+4
matrix.

উপরের ম্যাট্রিক্সটিকে দুটি প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের যোগফল আকারে লেখ।

(b) Show that $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ is an orthogonal matrix.

দেখাও যে উপরের ম্যাট্রিক্সটি একটি লম্ব ম্যাট্রিক্স।

Group-B

বিভাগ-খ

Full Marks-15

Answer Question No. 6 and any one from the rest.

৬ নং প্রশ্নটি এবং অপর যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর কর।

6. Answer any one question from the following:

3×1 =

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Show that the radius of a circle remains unchanged due to translation of axes.

দেখাও যে অক্ষস্থলের সরণের জন্য যে-কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধটি অপরিবর্তিত থাকে।

(b) Does the equation $12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$ represent a pair of straight lines? Justify your answer.

$12x^2 - 20xy + 7y^2 = 0$ সমীকরণটি কি একজোড়া সরলরেখাকে নির্দেশ করে? তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার কর।

(c) Find the distance between the points whose polar co-ordinates are $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$

and $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$.

$\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ এই মেরুস্থানাঙ্কের বিন্দুদুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. (a) Find the necessary condition that the general equation of second degree $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ may represent a pair of straight lines.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি কখন দুটি সরলরেখাকে নির্দেশ করবে-প্রয়োজনীয় শর্তটি লেখ।

- (b) Find the distance from the origin of the point of intersection of the straight lines given by $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$

উপরের সমীকরণটি যে দুটি সরলরেখা নির্দেশ করে তাদের ছেদবিন্দু থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. (a) Find the polar equation of the straight line joining two points α and β on the conic $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$. 6+6

$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ কনিকটির উপর দুটি বিন্দু α ও β এর সংযোজক সরলরেখাটির মেরু সমীকরণটি লেখ।

- (b) Determine the nature of the conic $r = \frac{1}{4 - 5 \cos \theta}$. Find also the eccentricity and length of the latus rectum.

$r = \frac{1}{4 - 5 \cos \theta}$ কনিকটির প্রকৃতি নিরূপণ কর। কনিকটির উৎকেন্দ্রিকতা ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Group-C

বিভাগ-গ

Full Marks-15

9. Answer any *one* question from the following: 3×1 = 3

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Show that the three vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ form the sides of a right-angled triangle.

দেখাও যে $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলিকে জ্ঞাত করে।

(b) If $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{\beta} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{\gamma} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ then find $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ and $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$.

যদি $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{\beta} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{\gamma} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ এবং $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ এর মান নির্ণয় কর।

(c) Find the vector equation of a straight line in parametric form passing through a given point A having position vector \vec{a} relative to some origin O and parallel to a vector \vec{b} .

প্যারামেট্রিক গঠনে একটি সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর যা একটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে যার অবস্থান ভেক্টর হল মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে \vec{a} এবং সরলরেখাটি অন্য একটি ভেক্টর \vec{b} এর সমান্তরাল।

10. Answer any *three* questions from the following: 4×3 =

নিম্নলিখিত যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Determine the values of λ and μ , for which the vectors $(-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k})$ and $(\mu\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})$ are collinear.

যদি $(-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k})$ এবং $(\mu\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k})$ ভেক্টর দুইটি রেখিক হয়, তাহলে λ , এবং μ এর মান নির্ণয় কর।

(b) Prove the identity $[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$

অভেদটি প্রমাণ কর $[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$

(c) Prove that the angle between the planes $\vec{\gamma} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = 7$ and $\vec{\gamma} \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = 5$ is $\cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{14} \sqrt{38}}$.

প্রমাণ কর যে, $\vec{\gamma} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = 7$ এবং $\vec{\gamma} \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = 5$ দুইটি সমতলের অন্তর্ভুক্ত কোণের মান $\cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{14} \sqrt{38}}$.

(d) Show by vector method, that the line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of its length.

ভেক্টর রীতিতে দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগকারী রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

- (e) A particle being acted on by constant forces $(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ and $(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ is displaced from the point $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ to the point $(5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$. Find the total work-done by the forces.

একটি কণার উপর ধ্রুবক বলগুলি $(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ এবং $(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ প্রয়োগের ফলে কণাটি $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ বিন্দু থেকে $(5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হল। এই বলগুলি দ্বারা মোট কার্যের মান নির্ণয় কর।

Group-D

বিভাগ-ঘ

Full Marks-25

Answer question No. 11 and any two from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

- 11.(a) Answer any one question from the following:

2×1

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের দাও:

- (i) If $f(x) = \frac{|x|}{x}$ and $c(\neq 0)$ be any real number, show that $|f(c) - f(-c)| = 2$.

যদি $f(x) = \frac{|x|}{x}$ এবং $c(\neq 0)$ যে-কোন বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে দেখাও যে $|f(c) - f(-c)| = 2$

- (ii) Find the radius of curvature for the curve

$$x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta) \text{ at } \theta = 0.$$

$x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ বক্রের $\theta = 0$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

- (iii) If $u = \sqrt{xy}$, find the value of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

যদি $u = \sqrt{xy}$ হয়, তাহলে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

(b) Answer any *one* question from the following:

3×1

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) If $f(x, y)$ be a homogeneous function of x and y of degree n then show that

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

$f(x, y)$ এক সমসত্ত্ব n ঘাতের x, y এর অপেক্ষক হয়, তবে প্রমাণ কর $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$.

(ii) If $f(x) = 2|x| + |x-2|$ find $f'(1)$

যদি $f(x) = 2|x| + |x-2|$ হয়, তবে $f'(1)$ এর মান নির্ণয় কর।

(iii) If $y = \sin(ax + b)$, then prove that $D^n y = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$, where $D \equiv \frac{d}{dx}$

যদি $y = \sin(ax + b)$, তাহলে প্রমাণ কর

$$D^n y = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right), \text{ where } D \equiv \frac{d}{dx}$$

12.(a) If $y = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$, show that $(y_{10})_0 = 2^{10}$.

যদি $y = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$, প্রমাণ কর $(y_{10})_0 = 2^{10}$

(b) If $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ be finite, find the value of 'a' and the limit.

যদি $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ এর মান সসীম হয়, তাহলে 'a' এর মান এবং সীমার মান নির্ণয় কর।

13.(a) Prove that the curves $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ and $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$ will cut orthogonally if

$$a - b = a' - b'.$$

যদি $a - b = a' - b'$ হয় তবে প্রমাণ কর $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ এবং $\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} = 1$ লম্বভাবে ছেদ করবে।

(b) Find the asymptotes of the curve $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$.

$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ বক্ররেখাটির প্রবণ রেখা নির্ণয় কর।

14.(a) If $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, prove that $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0$. 5

যদি $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, প্রমাণ কর $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u = 0$.

(b) If 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

$$\text{যদি } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

হয়, তাহলে দেখাও যে, $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

15.(a) If $H(x,y)$ be a homogeneous function, of x and y , of degree n having 5

continuous first order partial derivatives and $u(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{n}{2}}$, show that

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

যদি $H(x,y)$ x ও y এর একটি n মাত্রার সমঘাতী অপেক্ষক হয় এবং প্রথম আংশিক

অন্তরকলজদ্বয় সংজ্ঞার অঞ্চলে সন্তত হয় এবং $u(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{n}{2}}$ হলে দেখাও যে,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

(b) Given 4+1

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2}, & 2 < x \end{cases}$$

Examine the differentiability of $f(x)$ at $x = 1$. State with reasons whether f is continuous at $x = 1$.

যদি

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & , 0 \leq x < 1 \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2} & , 2 < x \end{cases}$$

হয় তাহলে $x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ -এর অন্তরকলন যোগ্যতা নির্ণয় কর।

$x = 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সাস্ত্য যথার্থসহ পরীক্ষা কর।

Group-E**বিভাগ-ঙ****Full Marks-10**

16. Answer any *one* question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) If a function $f(x)$ is periodic with period T , then prove that

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx, \quad n \text{ is an integer.}$$

যদি $f(x)$ পর্যায়কাল বিশিষ্ট একটি পর্যায়বৃত্ত অপেক্ষক হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx, \quad n \text{ পূর্ণসংখ্যা।}$$

(b) Evaluate: $\int_2^4 \{|x-2| + |x-3|\} dx$.

মান নির্ণয় কর: $\int_2^4 \{|x-2| + |x-3|\} dx$.

(c) Evaluate : $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \log x) dx$.

মান নির্ণয় কর $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \log x) dx$.

- (b) Show that the curve for which the normal at every point passes through the origin is a circle.

দেখাও যে, যে বক্রের প্রতিটি বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব মূল বিন্দুগামী সেটি একটি বৃত্ত।

- (c) Solve: $\{xy \cos(xy) + \sin(xy)\}dx + x^2 \cos(xy)dy = 0$.

সমাধান কর: $\{xy \cos(xy) + \sin(xy)\}dx + x^2 \cos(xy)dy = 0$.

19. Answer any two questions from the following:

4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) Solve: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$.

সমাধান কর: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \log y = \frac{y}{x^2} (\log y)^2$.

- (b) Find the general and the singular solution of $y = px + \sqrt{a^2 p^2 + b^2}$; $p \equiv \frac{dy}{dx}$.

সাধারণ ও বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় কর: $y = px + \sqrt{a^2 p^2 + b^2}$; $p \equiv \frac{dy}{dx}$.

- (c) Solve: $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(ydx + xdy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(xdy - ydx)$.

সমাধান কর: $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(ydx + xdy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(xdy - ydx)$.

- (d) If $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, then prove that $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2$.

যদি $(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2$.