



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-I Examinations, 2017

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-I

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.

প্রান্তিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণমান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা নিজের ভাষায় যথা সম্ভব শব্দসীমার মধ্যে
উত্তর করিবে।

All symbols are of usual significance.

Group-A

বিভাগ-ক

Answer Question No. 1 and any two from the rest

১ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) If ω is the cube root of unity, then show that

$$(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) = 1.$$

যদি ω , 1 এর একটি ঘনমূল হয় তবে প্রমাণ করো $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^4)(1 + \omega^8) = 1$.

(ii) Find the remainder when $x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x - 12$ is divisible by $(x + 3)$.

$x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x - 12$ বহুপদীকে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে সেটি নির্ণয় করো।

(iii) Prove without expanding that

বিস্তৃতির সাহায্যে ছাড়াই প্রমাণ করো

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ -\beta & -\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Answer any *one* question from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) Express the complex number i to its polar form, then find its modulus and principal amplitude.

i অবাস্তব সংখ্যাটিকে পোলার রূপে প্রকাশ করো এবং ইহার মডিউলাস ও প্রধান অ্যাম্প্লিটিউড নির্ণয় করো।

(ii) Find the condition that the sum of two roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ is zero.

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের যোগফল শূন্য হলে শর্ত নির্ণয় করো।

(iii) If $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ and $2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, then find A and B .

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ও $2A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ হলে A ও B নির্ণয় করো।

2. (a) If $(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni) = x+iy$, then find $2.5.10\cdots(1+n^2)$.

যদি $(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni) = x+iy$ হয় তাহলে $2.5.10\cdots(1+n^2)$ এর মান নির্ণয় করো।

(b) Show that $(1+i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}$.

দেখাও যে $(1+i\sqrt{3})^{30} = 2^{30}$ ।

(c) Prove that $\sin\left\{i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right\} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

প্রমাণ করো যে, $\sin\left\{i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right\} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ ।

x1 = 3

3. (a) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$, find the equation whose roots are $\alpha(\beta + \gamma)$, $\beta(\gamma + \alpha)$ and $\gamma(\alpha + \beta)$. 5+5

যদি $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি α, β, γ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজগুলি $\alpha(\beta + \gamma)$, $\beta(\gamma + \alpha)$ এবং $\gamma(\alpha + \beta)$ সেটি নির্ণয় করো।

- (b) Solve by Cardans method: $x^3 - 18x - 35 = 0$.

কার্ডান পদ্ধতিতে সমাধান করো: $x^3 - 18x - 35 = 0$ ।

4. (a) Prove that $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$ 5+5

Hence show that $\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$

where $2s = a + b + c$

3+3+4

প্রমাণ করো যে $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$

অতঃপর দেখাও যে, $\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$

যেখানে $2s = a + b + c$ ।

(b) If $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, then show that $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$. Hence find A^{-1} .

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ হয় তবে প্রমাণ করো যে, $A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ । ইহা থেকে A^{-1} নির্ণয় করো।

5. (a) Find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

and using it solve the following system of linear equations:

$$x + y + 2z = 4$$

$$2x - y + 3z = 9$$

$$3x - y - z = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির ইনভার্স নির্ণয় করো এবং}$$

ইহার সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান করো:

$$x + y + 2z = 4$$

$$2x - y + 3z = 9$$

$$3x - y - z = 2$$

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ \tan \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, show that

$$(I + A)(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

5+5

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ \tan \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তাহলে

দেখাও যে $(I + A)(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Group-B

বিভাগ-খ

Answer Question No. 6 and any one from the rest

৬ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও

6. Answer any one question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Find the points on the conic $\frac{5}{r} = 1 + 2 \cos \theta$ whose radius vector is 5 in each case.

$\frac{5}{r} = 1 + 2 \cos \theta$ কণিকটির ওপর যে বিন্দুগুলির radius vector 5 সেগুলি নির্ণয় করো।

- (b) The gradient of one of the straight lines of $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is twice the other. Show that $8h^2 = 9ab$.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখা দুটির একটির প্রবণতা অন্যটির প্রবণতার দ্বিগুণ হলে দেখাও যে $8h^2 = 9ab$ ।

- (c) Find the nature of the conic $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$.

$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

7. (a) Find the equation of the chord joining the two points whose vectorial angles are $\alpha - \beta$ and $\alpha + \beta$ on the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$. Hence find the equation of the tangent to the conic at the point whose vectorial angle is α .

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ কণিকের ওপর অবস্থিত $\alpha - \beta$ ও $\alpha + \beta$ ভেক্টোরিয়াল কোণ বিশিষ্ট বিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করো। অতঃপর ঐ কণিকের α ভেক্টোরিয়াল কোণ বিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (b) Reduce the equation $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic.

$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ সমীকরণটিকে স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করো এবং কণিকের প্রকৃতি নির্ণয় করো।

8. (a) If one of the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be perpendicular to one of the lines $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ prove that $(aa' - bb')^2 + 4(a'h + bh')(ah' + b'h) = 0$.

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের একটি $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের একটির সহিত লম্বভাবে থাকে তবে, প্রমাণ করো যে, $(aa' - bb')^2 + 4(a'h + bh')(ah' + b'h) = 0$ ।

- (b) Find the co-ordinates of the point $(-2, 8)$ referred to new axes obtained by rotating the old axes about the origin through an angle $\frac{\pi}{4}$ in the positive direction. 2

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অক্ষদ্বয়কে $\frac{\pi}{4}$ কোণে ধনাত্মক দিকে আবর্তনের ফলে নতুন অক্ষের সাপেক্ষে $(-2, 8)$ বিন্দুটির পরিবর্তিত অবস্থানের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

- (c) Find the pole of the straight line $lx + my + n = 0$ with respect to the parabola $y^2 = 4ax$. 4

4+2 $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের সাপেক্ষে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি পোল নির্ণয় করো।

Group-C

বিভাগ-খ

9. Answer any **one** question from the following: 3×1 = 3

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

- (a) If \hat{e}_1 and \hat{e}_2 be two unit vectors and θ be the angle between their directions, show that $2 \sin \frac{\theta}{2} = |\hat{e}_1 - \hat{e}_2|$.

\hat{e}_1 ও \hat{e}_2 দুটি একক ভেক্টর এবং যাদের মধ্যে কোণ θ তাহলে প্রমাণ করো $2 \sin \frac{\theta}{2} = |\hat{e}_1 - \hat{e}_2|$ ।

- (b) If $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$, then find $(2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c})$. Also find the unit vector along the vector $\vec{a} - \vec{b}$.

যদি $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ হয় তবে $(2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c})$ নির্ণয় করো। আরও $\vec{a} - \vec{b}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

(c) If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, then prove that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ হলে প্রমাণ করো যে $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$ ।

10. Answer any **three** questions from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Show by vector method that angle on a semi-circle is right angle.

ভেক্টর নিয়মে সাহায্যে দেখাও যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

(b) Prove by vector method, that in a triangle ABC $b = a \cos C + c \cos A$.

ভেক্টর নিয়মে দেখাও যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে $b = a \cos C + c \cos A$ ।

(c) Prove that $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$.

প্রমাণ করো যে $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$ ।

(d) Determine the values of λ and μ for which the two vectors $-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ and $\mu\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$ are collinear.

$-3\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ এবং $\mu\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$ এই ভেক্টর দুটি সমরেখ হলে λ ও μ এর মান নির্ণয় করো।

(e) Show that the three points whose position vectors are $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ form a right angle triangle.

দেখাও যে $2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$, $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$ এবং $3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ 'position vector' বিশিষ্ট বিন্দুত্রয় সমকোণী ত্রিভুজ নির্মাণ করে।

Group-D

বিভাগ-ঘ

Answer Question No. 11 and any two from the rest

3 = 12

১১ নং প্রশ্ন ও যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

11.(a) Answer any *one* question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) Find the interval for which $f(x) = 1$ and $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ are identical.যে অঞ্চলে $f(x) = 1$ এবং $\phi(x) = \frac{|x|}{x}$ অপেক্ষকদুটি একই তা নির্ণয় করো।(ii) Express rational numbers 0.181818..... in the usual form $\frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}$.0.181818..... মূলদ সংখ্যাটিকে $\frac{p}{q}$ আকার প্রকাশ করো যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$ হয়।(iii) Show that two curves $x^3 - 3xy^2 = -2$ and $3x^2y - y^3 = 2$ cut each other orthogonally.দেখাও যে $x^3 - 3xy^2 = -2$ এবং $3x^2y - y^3 = 2$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।(b) Answer any *one* question from the following:

3×1 = 3

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(i) If $y = \frac{x}{x+1}$, find y_n (where y_n is the n^{th} derivative of y with respect to x) and hence find $y_7(0)$.যদি $y = \frac{x}{x+1}$ হয় তবে y_n নির্ণয় করো (যেখানে y_n , x -এর সাপেক্ষে y এর n তম অবকলন সহগ)। অতঃপর $y_7(0)$ এর মান নির্ণয় করো।

- (ii) Examine whether the function $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ is homogeneous or not.

$$f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right) \text{ অপেক্ষকটি সমসত্ত্ব কিনা পরীক্ষা করো।}$$

- (iii) Show that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

দেখাও যে $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা নয়।

- 12.(a) If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ then prove that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$$

যদি $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0।$$

- (b) Show that the pedal equation of the parabola $y^2 = 4a(x+a)$ with respect to origin is $p^2 = ar$.

দেখাও যে $y^2 = 4a(x+a)$ অধিবৃত্তটির মূলবিন্দুর সাপেক্ষে 'pedal' সমীকরণটি হবে $p^2 = ar$ ।

- 13.(a) Show that the radius of curvature at the points (r, θ) on the cardioids $r = a(1 - \cos \theta)$ varies as \sqrt{r} .

দেখাও যে $r = a(1 - \cos \theta)$ বক্ররেখাটির (cardioids) (r, θ) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ \sqrt{r} এর সাথে সরলভেদ থাকে।

- (b) Show that for any curve the rectangle contained by the subtangent and the subnormal is equal to the square on the corresponding ordinate.

দেখাও যে বক্ররেখার ওপর যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র সেই বিন্দুর কোটির ওপর গঠিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

(c) Find the asymptotes to the curve $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$. 4

$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$ এই বক্ররেখাটির Asymptote-গুলি নির্ণয় করো।

14.(a) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, show that 5

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হয় তবে দেখাও যে

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}.$$

(b) If $f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; (x, y) \neq (0, 0)$ 5

$$= 0 \quad ; (x, y) = (0, 0)$$

examine whether $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$.

যদি $f(x, y) = xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; (x, y) \neq (0, 0)$

$$= 0 \quad ; (x, y) = (0, 0)$$

তবে $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ হবে কিনা পরীক্ষা করো।

15.(a) If $u(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, apply Euler's theorem to find the value of $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$. 2+3

Hence deduce that $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u$.

যদি $u(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ হয়, তবে Euler's এর উপপাদ্যের সাহায্যে $x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x}$ -এর মান

নির্ণয় করো। এর সাহায্যে দেখাও যে, $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6u$ ।

- (b) Show that the curves $r^n = a^n \sec(n\theta + \alpha)$ and $r^n = b^n \sec(n\theta + \beta)$ intersect at an angle which is independent of a and b .

দেখাও যে $r^n = a^n \sec(n\theta + \alpha)$ এবং $r^n = b^n \sec(n\theta + \beta)$ বক্ররেখা দুটির ছেদ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণটির মান a ও b এর উপর নির্ভরশীল নয়।

Group-E

বিভাগ-ঙ

16. Answer any *one* question from the following:

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Evaluate: $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$.

মান নির্ণয় করোঃ $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$ ।

(b) Integrate: $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \log x) \, dx$.

সমাকলিত করোঃ $\int \frac{e^x}{x} (1 + x \log x) \, dx$ ।

(c) Evaluate: $\int_2^4 \{|x-2| + |x-3|\} \, dx$.

মান নির্ণয় করোঃ $\int_2^4 \{|x-2| + |x-3|\} \, dx$ ।

17. Answer any *two* questions from the following:

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলি থেকে যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Evaluate: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \dots + \frac{1}{n} \right]$.

মান নির্ণয় করো: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2n-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n-2^2}} + \dots + \frac{1}{n} \right]$ ।

(b) Integrate: $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$.

সমাকলিত করো: $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+8}}$ ।

(c) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, then show that $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$.

Hence deduce the value of I_4 .

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ হয়, তবে দেখাও যে $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ এবং তা থেকে I_4 এর মান

নির্ণয় করো।

(d) Prove that $\int_0^{\pi} x \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi^2}{16}$.

প্রমাণ করো: $\int_0^{\pi} x \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi^2}{16}$ ।

Group-F

বিভাগ-চ

18. Answer any **one** question from the following:

2×1 = 2

নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Form the differential equation of the family of curves $Ax^2 + By^2 = 1$ where A and B are positive arbitrary constants.

$Ax^2 + By^2 = 1$ বক্রসম্বন্ধিত গোষ্ঠীর (A ও B যথেষ্ট ধ্রুবক) অন্তরকল সমীকরণ গঠন করো।

(b) Solve: $x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.

সমাধান করো: $x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$ ।

(c) Test whether the differential equation $(2x^3 + y)dx + (4x + y - 1)dy = 0$ is exact or not.

$(2x^3 + y)dx + (4x + y - 1)dy = 0$ অন্তরকল সমীকরণটি যথার্থ কিনা পরীক্ষা করো।

19. Answer any **two** questions from the following:

4×2 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(a) Solve the differential equation $x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$.

$x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$ এই অন্তরকল সমীকরণটির সমাধান করো।

(b) Find the singular solution of $y = px + p - p^2$; where $p = \frac{dy}{dx}$.

$y = px + p - p^2$; $p = \frac{dy}{dx}$ সমীকরণটির বিশিষ্ট সমাধান নির্ণয় করো।

(c) Solve the differential equation

$$(1 + y + x^2 y) dx + (x + x^3) dy = 0, \text{ given that } y=1 \text{ when } x=1.$$

$(1 + y + x^2 y) dx + (x + x^3) dy = 0$ এই অন্তরকল সমীকরণটির সমাধান করো।

(d) Solve the differential equation

$$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy.$$

$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$ এই অন্তরকল সমীকরণটির সমাধান করো।