

MTMG(GEN)-02

West Bengal State University
B.A./B.Sc./B.Com (Honours, Major, General) Examinations, 2015

PART - II
MATHEMATICS — GENERAL
Paper - II

Duration : 3 Hours]

[Full Marks : 100

The figures in the margin indicate full marks.

প্রাপ্তস্ব সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের দ্যোতক।

Group - A

বিভাগ - ক

[Full Marks : 25]

[পূর্ণমান : 25]

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. a) If D, E, F are three non-empty subsets of the universal set X , then prove that
 $(D \cup E \cup F') \cap (D \cup E' \cup F) = D \cup F'$. 2

X একটি universal সেট। যদি D, E, F, X -এর তিনটি অশূন্য উপসেট হয় তবে প্রমাণ করুন যে
 $(D \cup E \cup F') \cap (D \cup E' \cup F) = D \cup F'$.

OR/অথবা

Let $A = \{ 1, 4 \}$ and $B = \{ 4, 5 \}$. Verify whether $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$,
where $P(A)$ denotes power set of A .

যদি $A = \{ 1, 4 \}$ এবং $B = \{ 4, 5 \}$ হয়, তবে $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ সম্পর্কটির সত্যতা
যাচাই করুন, যেখানে $P(A)$, সেট A -এর power set চিহ্নিত করে।

- b) Let $f : R \rightarrow R$ (R is the set of all real numbers) be a mapping defined by
 $f(x) = \sin x, x \in R$. Is the mapping bijective? Justify. 3

একটি চিত্রণ $f : R \rightarrow R$ (R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট) এমনভাবে বর্ণিত যে $f(x) = \sin x$
যেখানে $x \in R$ । চিত্রণটি কি এক-এক উপরিচিত্রণ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

OR/অথবা

SUB-B.A./B.Sc.(GEN) MTMG-6077

[Turn over

Prove that a group $(G, *)$ is commutative if $a = a^{-1}$, $\forall a \in G$, but the converse is not true.

প্রমাণ করুন যে একটি দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য হবে যদি $\forall a \in G$, $a = a^{-1}$ হয়। তবে দেখান যে দলটি বিনিময়যোগ্য হলেও $a = a^{-1}$ ($\forall a \in G$) নাও হতে পারে।

2. a) Let $f: A \rightarrow B$ and $g: B \rightarrow C$ be two surjective mappings. Then show that $g \circ f$ is also surjective.

$f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ দুটি উপরিচিত্রণ হলে দেখান যে $g \circ f$ ও একটি উপরিচিত্রণ।

- b) Show that the mapping $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = 7x - 5$, $\forall x \in R$ is bijective. Find f^{-1} .

$f: R \rightarrow R$ চিত্রণটি এমন ভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 7x - 5$, $\forall x \in R$, দেখান যে চিত্রণটি একটি এক-এক উপরিচিত্রণ। f^{-1} চিত্রণটি নির্ণয় করুন।

- c) If $f(x) = x^2$ and $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $\forall x \in R$

where $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are two mappings, (R is the set of all real numbers), is the product of the mappings $f \circ g$ is commutative? Justify your answer.

দুটি চিত্রণ $f: R \rightarrow R$ এবং $g: R \rightarrow R$ এমন ভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = x^2$ এবং

$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $\forall x \in R$ (R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট)। তবে চিত্রণ দুটির গুণ, $f \circ g$

কি বিনিময়যোগ্য হবে? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

3. a) Let $(M_2^*(R), *)$ denotes the group of all 2×2 non-singular matrices over R

Show that $(G, *)$, the set of all 2×2 real matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with $ad - bc = 1$

under the operation $*$ is a subgroup of $(M_2^*(R), *)$, where R is the set of all real numbers and $*$ denotes the usual matrix multiplication.

মনে করি R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $(M_2^*(R), *)$, R -এর উপর সংজ্ঞাত সকল 2×2 , non-singular সারির (matrix) দলকে চিহ্নিত করে। G , সকল 2×2 , বাস্তব সংখ্যার সারি (matrix) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ -র সেট, যেখানে $ad - bc = 1$. দেখান যে $(G, *)$, $(M_2^*(R), *)$ -এর একটি

উপদল যেখানে '*' সাধারণ matrix multiplication-এর নিয়মকে চিহ্নিত করে।

- b) Let $(H, *)$ be a subgroup of a group $(G, *)$. Prove that the identity element of $(H, *)$ is the same as that of $(G, *)$. 2

ধরা যাক যে $(H, *)$, $(G, *)$ দলের একটি উপদল। প্রমাণ করুন যে $(H, *)$ উপদলের identity element হল $(G, *)$ দলের identity element.

- c) In a group $(G, *)$, show that $((a * b) * b) * ((a * b)^{-1} * a) = a * b, \forall a, b \in G$. 2

ধরা যাক $(G, *)$ একটি দল। দেখান যে $((a * b) * b) * ((a * b)^{-1} * a) = a * b, \forall a, b \in G$.

- d) Does the set of all irrational numbers form a group under usual addition? Justify. 2

সকল অমূলদ সংখ্যার সেট সাধারণ যোগের নিয়মের সাপেক্ষে একটি দল গঠন করে কি? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিন।

4. a) Let $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$ where Z is the set of all integers and $i = \sqrt{-1}$. Considering $Z[i]$ to be a commutative group under usual addition, show that it is a commutative ring under usual addition and multiplication. 4

ধরা যাক, $Z[i] = \{a + bi : a, b \in Z\}$ যেখানে Z সকল অখণ্ড সংখ্যার সেটকে চিহ্নিত করে এবং $i = \sqrt{-1}$. $Z[i]$, সাধারণ যোগের নিয়মের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল গঠন করে। এটা ধরে নিয়ে দেখান যে $Z[i]$ সাধারণ যোগ এবং গুণের নিয়মের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য মণ্ডল গঠন করে।

- b) In a ring R , prove that $(-a)(-b) = ab \forall a, b \in R$. 3

প্রমাণ করুন যে একটি মণ্ডল R -এ $(-a)(-b) = ab \forall a, b \in R$ সম্পর্কটি সত্যি হয়।

- c) Let $(Z, +, \cdot)$ be the ring of integers. Show that the set $I_n = \{kn : k \in Z\}$ for any arbitrarily chosen $n \in Z$ is a subring of $(Z, +, \cdot)$. How many such subrings of $(Z, +, \cdot)$ can be obtained? 2 + 1

ধরা যাক $(Z, +, \cdot)$ সকল অখণ্ড সংখ্যার মণ্ডল এবং $I_n = \{kn : k \in Z\}$ একটি সেট যেখানে n, Z -এর মধ্যে অবস্থিত যে কোন একটি অখণ্ড সংখ্যা। দেখান যে $(I_n, +, \cdot)$, $(Z, +, \cdot)$ -এর একটি উপমণ্ডল। এইরকম কতগুলি উপমণ্ডল গঠন করা সম্ভব?

5. a) State the Cayley-Hamilton theorem. If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, use the theorem to express the matrix polynomial $2A^4 - 7A^3 + 7A^2 - 50A - 10I$ as a linear polynomial in A . 1 + 4
- Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি বিবৃত করুন। ধরা যাক $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; তাহলে উপপাদ্যটির সাহায্যে $2A^4 - 7A^3 + 7A^2 - 50A - 10I$ matrix polynomial-টিকে A -সারির (matrix) সাপেক্ষে একটি linear polynomial হিসেবে প্রকাশ করুন।
- b) Write the vector $\alpha = (1, 7, 4)$ as a linear combination of the vectors $\alpha_1 = (1, -3, 2)$ and $\alpha_2 = (2, -1, 1)$ in the vector space $V_3(R)$, where R is the field of real numbers. 2
- মনে করি R , সকল বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র। $V_3(R)$ ভেক্টর দেশে, $\alpha = (1, 7, 4)$ ভেক্টরটিকে $\alpha_1 = (1, -3, 2)$ এবং $\alpha_2 = (2, -1, 1)$ ভেক্টর দুটির linear combination হিসেবে প্রকাশ করুন।
- c) Show that the set $B = \{ (1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ forms a basis of the vector space R^3 over R , where R is the field of all real numbers. 3
- দেখান যে $B = \{ (1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ সেটটি ভেক্টর দেশ R^3 -এর ওপর R -এর একটি ভিত্তি গঠন করে যেখানে R সকল বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র।

Group - B

বিভাগ - খ

[Full Marks : 20]**[পূর্ণমান : 20]**

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any two questions : 2 × 2 = 4
যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :
- a) What are the direction cosines of a straight line which makes angles 60° and 45° with z -axis and x -axis respectively ?
একটি সরলরেখা z -অক্ষ এবং x -অক্ষ-এর সঙ্গে যথাক্রমে 60° ও 45° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির কোসাইন দিগন্তগুলির মান নির্ণয় করুন।

- b) Find the equation of the plane passing through the point (2, 1, 1) and parallel to the plane $2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Also find the distance of the plane from the origin.

$2x - 3y + 4z + 5 = 0$ সমতলটির সমান্তরাল এবং (2, 1, 1) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন। মূলবিন্দু থেকে নির্ণেয় সমতলটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।

- c) Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y - 2z = 4$ and the origin.

মূলবিন্দুগামী এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y - 2z = 4$ বৃত্তগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

7. a) Find the equation of the plane through the point (2, 5, - 8) and perpendicular to each of the planes $2x - 3y + 4z + 1 = 0$ and $4x + y - 2z + 6 = 0$. 4

$2x - 3y + 4z + 1 = 0$ এবং $4x + y - 2z + 6 = 0$ সমতলদুটির প্রত্যেকটির উপর লম্ব এবং (2, 5, - 8) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Show that the straight lines $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$ and $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$ are coplanar. 4

দেখান যে $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{5}$ এবং $x + 2y + 3z - 9 = 0 = 2x - y + 2z - 11$

সরলরেখাদুটি একই সমতলে অবস্থিত।

8. a) Find the equation of the plane which bisects the acute angle between the planes $x + 2y + 2z = 9$ and $4x - 3y + 12z + 13 = 0$. 4

$x + 2y + 2z = 9$ এবং $4x - 3y + 12z + 13 = 0$ সমতলদুটির মধ্যে উৎপন্ন সূক্ষ্মকোণটির সমদ্বিখণ্ডক সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

- b) Find the magnitude of the shortest distance between the straight lines $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ and $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$. 4

$\frac{x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ এবং $5x - 2y - 3z + 6 = 0 = x - 3y + 2z - 3$ সরলরেখাদুটির মধ্যে

ন্যূনতম দূরত্বটি নির্ণয় করুন।

9. a) Find the equation of the sphere passing through the four points $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$, $(1, 2, 3)$. 4
 $(0, 0, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(-1, 2, 0)$, $(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
- b) Find the equation of the plane containing the straight line $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ and parallel to the straight line $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-3}$. 4
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{-3}$ সরলরেখাটির সমান্তরাল এবং $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ সরলরেখাগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
10. a) Find the equation of the sphere whose centre lies on the straight line $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$ and which passes through the points $(3, 4, 5)$ and $(-3, 0, 1)$. 4
 $(3, 4, 5)$ এবং $(-3, 0, 1)$ বিন্দুগামী গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্রবিন্দু $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$ সরলরেখাটির উপর অবস্থিত।
- b) Find the equation of the sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle. 4
এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার সাপেক্ষে $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি একটি মহাবৃত্ত।

Group - C

বিভাগ - গ

[Full Marks : 25]**[পূর্ণমান : 25]**Answer Question No. 11 and any *two* from the rest.

11 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. a) Answer any *one* question : 1 × 2 = 2
যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :
- i) Is Rolle's theorem applicable to $f(x) = \tan x$ in $(0, \pi)$? Give reasons for your answer.

$(0, \pi)$ অন্তরালে $f(x) = \tan x$ অপেক্ষকটিতে Rolle-এর উপপাদ্যটি প্রযোজ্য কি ?
যুক্তিসহ উত্তর দিন।

ii) Show that the sequence $\{x_n\}$ where $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$
is a monotone increasing sequence.

$x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)}$ হলে দেখান যে $\{x_n\}$ অনুক্রমটি সমক্রমী
ক্রমবর্ধমান।

iii) Find the domain of definition of $f(x)$ where $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$.

$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করুন।

b) Answer any one question :

$1 \times 3 = 3$

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

i) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$.

মান নির্ণয় করুন : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$.

ii) If $f(x) = 2|x| + |x-2|$, find $f'(1)$.

$f(x) = 2|x| + |x-2|$, $f'(1)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

iii) Prove that a convergent sequence is bounded.

প্রমাণ করুন যে অভিসারী অনুক্রম বদ্ধ।

12. a) Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, where n is a +ve integer.

3

n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ করুন যে $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$.

b) Examine the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

3

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- c) Use Cauchy criterion to show that the sequence $\{x_n\}$ defined by

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ is convergent.}$$

Cauchy criterion প্রয়োগ করে $\{x_n\}$ অনুক্রমটিকে, যেখানে

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \text{ অভিসারী দেখান।}$$

13. a) If $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ is finite, find the value of a and the limit.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ সসীম হলে, a -এর মান নির্ণয় করুন এবং সেক্ষেত্রে সীমার মান নির্ণয় করুন।

- b) If $f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$

Examine whether $f(x)$ is differentiable at $x = 1$. Is the function continuous at $x = 1$? Justify.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x - \frac{x^2}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য কিনা পরীক্ষা করুন। অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত হবে কি? যুক্তিসহ বলুন।

- c) Expand e^x in ascending powers of x with remainder in Lagrange's form.

e^x -কে x -এর ঘাতের উর্ধ্বক্রমে Lagrange-এর Remainder বিশিষ্ট শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

14. a) Find the envelope of the family of straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where the parameters a and b are connected by the relation $a^2 + b^2 = 9$.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা গোষ্ঠীর পরিস্পর্শক নির্ণয় করুন যেখানে পরিবর্তনশীল প্রাচল a এবং b , $a^2 + b^2 = 9$ সম্পর্ক দ্বারা যুক্ত।

- b) Find the rectilinear asymptotes, if any, of the curve

$$x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0.$$

$x(x-y)^2 - 3(x^2 - y^2) + 8y = 0$ বক্ররেখাটির স্পর্শপ্রবণ সরলরেখা নির্ণয় করুন।

- c) Find the extreme values of $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$. 3
 $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - 20x$ -এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করুন।
15. a) For a given volume of a right cone show that, when curved surface is minimum, the semi-vertical angle is $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 4
নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট একটি লম্ব শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হলে দেখান যে অর্ধ-শীর্ষ কোণটি হবে $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- b) In the Mean value theorem $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, show that the limiting value of θ as $h \rightarrow 0$ is $\frac{1}{2}$ when $f(x) = \cos x$. 3
মধ্যম মান উপপাদ্যে $f(h) = f(0) + hf'(\theta h)$, $0 < \theta < 1$, $h \rightarrow 0$ হলে দেখান যে θ -এর সীমাস্থ মান $\frac{1}{2}$, যখন $f(x) = \cos x$.
- c) Show that $(3, 2)$ is a double point on the curve $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$. Find the nature of the double point. 3
দেখান যে, $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$ বক্রের উপর অবস্থিত $(3, 2)$ বিন্দুটি একটি দ্বি-বিন্দু। ঐ দ্বি-বিন্দুটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

Group - D

বিভাগ - ঘ

[Full Marks : 20]**[পূর্ণমান : 20]**

Answer Question No. 16 and any two from the rest.

16 নং প্রশ্ন ও অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any two questions : 2 × 2 = 4
যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Examine the convergence of $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$. If so, find the value.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন এবং অভিসারী হলে সেটির মান নির্ণয় করুন।

b) Evaluate $\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$.

$\int_0^1 \int_0^2 x^3 y \, dx \, dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

c) Find the length of the curve $y = \log \sec x$ from the interval $x = 0$ to $x = \frac{\pi}{3}$.

$x = 0$ থেকে $x = \frac{\pi}{3}$ অন্তরালে, $y = \log \sec x$ বক্ররেখার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

d) Find the value of $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$.

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

17. a) Prove that $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$ ($m, n > 0$) and hence find the value of $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 3 + 1

প্রমাণ করুন যে $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta \, d\theta$ ($m, n > 0$) এবং এর থেকে

$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

b) Define the relation between Beta and Gamma functions and hence prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 1 + 3

Beta ও Gamma অপেক্ষকদুটির সম্পর্ক লিখুন ও এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

18. a) Find the area of the circle $r = 2a \sin \theta$. 4

$r = 2a \sin \theta$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

b) Evaluate $\iint_R (x+y) \, dx \, dy$ over the region R bounded by $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$. 4

$x \geq 0$, $y \geq 0$ এবং $x+y \leq 1$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র R হলে $\iint_R (x+y) \, dx \, dy$ -এর মান নির্ণয় করুন।

19. a) Find the area above the x -axis included between the parabola $y^2 = ax$ and the circle $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$). 4

x অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত $y^2 = ax$ অধিবৃত্ত ও $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

- b) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ revolves round the x -axis. Find the surface area and volume of the whole surface generated. 4

x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে আবর্তিত করলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তার উপরিতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় করুন।

20. a) Examine the convergence of the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$. 4

অপ্রকৃত সমাকল $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ -এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

- b) Show that $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$. 4

দেখান যে, $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{1}{5} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

Group - E

বিভাগ - ঙ

[Full Marks : 10]

[পূর্ণমান : 10]

21. Answer any one question :

1 × 2 = 2

যে কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find complementary function of differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$.

$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

b) Solve : $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

সমাধান করুন : $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

c) Find the particular integral of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x} \text{ অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।}$$

22. Answer any two questions :

2 × 4 = 8

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin 2x$.

সমাধান করুন : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \sin 2x$.

b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2$, given $y = -1$ when $x = 2$ and $\frac{dy}{dx} = 3$ when $x = 1$.

সমাধান করুন : $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2$, প্রদত্ত $y = -1$ যখন $x = 2$ ও $\frac{dy}{dx} = 3$ যখন $x = 1$.

c) Solve : $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10 \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

সমাধান করুন : $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10 \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

d) Find the orthogonal trajectories of the family of curves $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$, where λ is a parameter.

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \text{ [যেখানে } \lambda \text{ একটি চল (parameter)] ; বক্র গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ}$$

নির্ণয় করুন।