

West Bengal State University
B.A./B.Sc./B.Com. (Honours, Major, General) Examinations, 2013

PART-II

MATHEMATICS – General

Paper– II

Duration : 3 Hours

Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

The figures in the margin indicate full marks.

উত্তর যথাসম্ভব নিজের ভাষায় লেখা বাঞ্ছনীয়।

প্রাস্তস্থ সংখ্যাগুলি পূর্ণমানের নির্দেশক।

GROUP – A

(Full Marks : 25)

বিভাগ - ক

(পূর্ণমান : ২৫)

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন।

- a) Let Z be the set of integers and A and B are subsets of Z such that $A = \{x \in Z : 4 \leq x \leq 15\}$, $B = \{x \in Z : x \geq 3\}$. Find $A - B$. 2

ধরা যাক Z , সমস্ত অখন্ড সংখ্যার সেট। $A = \{x \in Z : 4 \leq x \leq 15\}$ এবং $B = \{x \in Z : x \geq 3\}$, Z -এর দুটি উপসেট। তবে $A - B$ এর মান নির্ণয় করুন।

OR/ অথবা

Is the mapping $f : z \rightarrow \mathcal{Q}$ defined by $f(x) = 2x - 1$, $x \in Z$ onto?

একটি অপেক্ষক $f : z \rightarrow \mathcal{Q}$ এমনভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x - 1$, $x \in Z$ । অপেক্ষকটি উপরি-অপেক্ষক হবে কিনা নির্ণয় করুন।

- b) For the three sets $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, f\}$, $c = \{a, f\}$, verify that $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$. 3

তিনটি সেট $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, f\}$, $c = \{a, f\}$ হলে, যাচাই করুন যে

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

OR/অথবা

Show that the mapping $f : R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$ defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ is bijective.

একটি অপেক্ষক $f : R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$, এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হলে দেখান অপেক্ষকটি একটি এক-এক উপরিচিত্রণ।

2. a) Let the function $f : R \rightarrow R$ be defined by $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$, the set of real numbers. If $A = \{x \in R : 1 < x \leq 2\}$, find $f(A)$.

একটি অপেক্ষক $f : R \rightarrow R$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$, যেখানে R হল সর্ব বাস্তব সংখ্যার সেট। যদি সেট $A = \{x \in R : 1 < x \leq 2\}$ হয় তবে $f(A)$ নির্ণয় করুন।

- b) Find f^{-1} , where $f : R^+ \rightarrow R^+$ is a mapping defined by $f(x) = x^2 + 3$, (R^+ is the set of positive real numbers)

$f : R^+ \rightarrow R^+$ অপেক্ষকটি এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = x^2 + 3$, $x \in R^+$ যেখানে R^+ হল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। তবে f^{-1} -এর মান নির্ণয় করুন।

- c) Two mappings $f : R \rightarrow R$ and $g : R \rightarrow R$ are defined as follows :

$f(x) = 4x - 1$, $g(x) = x^2 + 2$. Determine the composite mapping $(f \circ g)$ where $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

দুটি ম্যাপিং $f : R \rightarrow R$ এবং $g : R \rightarrow R$ (R বাস্তব সংখ্যার সেট) $f(x) = 4x - 1$ ও $g(x) = x^2 + 2$ দ্বারা পরিভাষিত। তবে $(f \circ g)$ ম্যাপিংটি নির্ণয় করুন যেখানে $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ।

3. a) Show that the set $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \text{ is a real number and } a \neq 0 \right\}$ is an Abelian group under matrix multiplication.

দেখান যে $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \neq 0 \text{ এবং } a \text{ একটি বাস্তব সংখ্যা} \right\}$ সেটটি ম্যাট্রিক্সের প্রচলিত গুণ সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য দল হবে।

- b) Let G be a group and $H = \{y \in G : xy = yx \forall x \in G\}$. Show that H is commutative subgroup of G . If G is an Abelian, find H .

G একটি দল এবং $H = \{y \in G : xy = yx \forall x \in G\}$ একটি সেট। দেখান যে H , G -এর একটি বিনিময়যোগ্য উপদল (commutative subgroup)। যদি G বিনিময়যোগ্য দল হয় তবে H এর মান নির্ণয় করুন।

- c) "The set of all odd integers is a subgroup of the additive group $(\mathbb{Z}, +)$ of integers." Is the statement true? Justify.

" $(\mathbb{Z}, +)$ অখন্ড সংখ্যাগুলির, যোগক্রিয়া সাপেক্ষে একটি দল। তবে সমস্ত বিজোড় অখন্ড সংখ্যাগুলির $(\mathbb{Z}, +)$ এর একটি উপদল (subgroup) হবে।" কথাটির সত্যতা বিচার করুন।

- a) In a ring $(R, +, \cdot)$ prove that $a \cdot 0 = 0, \forall a \in R$ in R where '0' is the zero element in the ring. 2

প্রমাণ করুন যে $(R, +, \cdot)$ মণ্ডলে $a \cdot 0 = 0, \forall a \in R$ হয় যেখানে '0' মণ্ডলটির যোগের সাপেক্ষে একক উপাদান।

- b) Let $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ be the ring of complex numbers under usual addition and multiplication. Verify whether the set $D = \{z : z \text{ is a complex number and } |z| = 1\}$ is a subring of $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ under usual addition and multiplication. 3

ধরা যাক $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ জটিল সংখ্যার প্রচলিত যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি মণ্ডল। $D = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ এবং } |z| = 1\}$ একটি সেট। যাচাই করুন যে জটিল সংখ্যার প্রচলিত যোগ ও গুণের সাপেক্ষে D সেটটি $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ -এর একটি উপমণ্ডল।

- c) Let $S = \{a + b\sqrt{5} : a, b \text{ are rational numbers}\}$. Show that S is a sub-field of the Field $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ of rational numbers. 5

দেখান যে $S = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ সেটটি $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ক্ষেত্রটির একটি উপক্ষেত্র।

- a) Show that $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is a basis of R^3 . Express the vector $(1, 2, 3) \in R^3$ as a linear combination of the basis B . 1 + 3

দেখান যে $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ সেটটি ভেক্টর দেশ R^3 এর ওপর R -এর একটি ভিত্তি তৈরী করে। ভেক্টর $(1, 2, 3) \in R^3$ -কে ভিত্তি B -এর ভেক্টরগুলির সাহায্যে প্রকাশ করুন (linear combination of the basis B)।

- b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hence find A^{-1} . 3 + 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে Cayley-Hamilton উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করুন। এর

সাহায্যে A^{-1} -এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করুন।

GROUP - B

(Full Marks : 20)

বিভাগ - খ

(পূর্ণমান : ২০)

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any two questions :

যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) What are the direction cosines of the straight line joining the points (3, 4, -1) and (1, 7, -7) ?

(3, 4, -1) এবং (1, 7, -7) বিন্দু দুটির সংযোগকারী সরলরেখাটির দিগঙ্কগুলি নির্ণয় করুন।

- b) Find the equation of the plane passing through the point $P (a, b, c)$ perpendicular to OP where O is the origin.

 $P (a, b, c)$ বিন্দুগামী এবং OP সরলরেখার উপর লম্ব সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করুন, যেখানে O মূলবিন্দু।

- c) Find the equation of the sphere having (2, 0, 5) and (-1, 2, 3) as its diametric end points.

(2, 0, 5) ও (-1, 2, 3) যে গোলকের ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু, সেই গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

7. a) The sum of the reciprocals of intercepts on the coordinate axes of a plane is always equal to a non-zero constant $\frac{1}{k}$. Show that the plane passes through (k, k, k) .

একটি চলমান তলের অক্ষগুলির সঙ্গে ছেদিতাংশের অন্যান্যকগুলির যোগফল একটি ধ্রুবক $\frac{1}{k}$ সমান। প্রমাণ করুন যে, সমতলটি (k, k, k) বিন্দুগামী।

- b) Find the co-ordinates of the point where the line $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$ intersects the plane $x + y + z = 2$. 4

$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2}$ সরলরেখাটির সঙ্গে $x + y + z = 2$ সমতলটির ছেদবিন্দুটি নির্ণয় করুন।

- a) Show that the lines $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ and $\frac{x-8}{7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{3}$ are coplanar. 4

দেখান যে, $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ এবং $\frac{x-8}{7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{3}$ সরলরেখাদুটি একই তলে অবস্থিত।

- b) Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3} \text{ and } \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad 4$$

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ এবং $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ সরলরেখাদুটির ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন।

- a) Find the equation of the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

$$2x + 3y + 4z = 5 \text{ and the point } (1, 2, 3). \quad 4$$

যে গোলকটি $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ বৃত্তগামী ও $(1, 2, 3)$ বিন্দুগামী, তার সমীকরণটি লিখুন।

- b) Find the equation of the sphere which has its centre at the origin and which touches the line $2(x+1) = 2-y = z+3$. 4

যে গোলকের কেন্দ্রটি মূলবিন্দু এবং $2(x+1) = 2-y = z+3$ সরলরেখাটিকে স্পর্শ করেছে তার সমীকরণটি লিখুন।

- a) Find the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ at the point $(6, -3, -2)$. 3

$x^2 + y^2 + z^2 = 49$ গোলকটির $(6, -3, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শতলটির সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

- b) Find the equation of the sphere touching the three coordinate planes. 5

যে গোলকটি তিনটি coordinate তলেই স্পর্শ করেছে তার সমীকরণটি নির্ণয় করুন।

GROUP - C

(Full Marks : 25)

বিভাগ - গ

(পূর্ণমান : ২৫)

Answer Question No. 11 and any two from the rest.

১১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any one question :

যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) (i) Verify whether the sequence $\left\{ \frac{4x+3}{x+2} \right\}_n$ is monotonic increasing.যাচাই করুন যে $\left\{ \frac{4x+3}{x+2} \right\}_n$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান কি না ?(ii) If $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 + 7x}{\sin x}$ is continuous at $x = 0$, find $f(0)$.যদি $f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2 + 7x}{\sin x}$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তুত হয় তবে $f(0)$ -এর মান নির্ণয় করুন।(iii) Find the domain of definition of $\log(x^2 - 5x + 6)$. $\log(x^2 - 5x + 6)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

b) Answer any one question :

যে কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

(i) Is Rolle's theorem applicable to the function $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ in $[0, a]$. Justify. $[0, a]$ অন্তরালে $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$ অপেক্ষকটিতে Rolle -এর উপপাদ্য প্রযোজ্য কারণসহ উত্তর দিন।(ii) Show that the function $f(x) = x^5$ has neither a maximum nor a minimum at $x = 0$.দেখান যে $f(x) = x^5$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে মানটি চরম বা অবম কোনটিই নয়।(iii) If $f(x) = 1, x < 0$

$$= 1 + \sin x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

then find $f'(0)$, if exists.যদি $f(x) = 1, x < 0$

$$= 1 + \sin x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$
 হয় তবে অস্তিত্ব থাকলে $f'(0)$ -এর মান নির্ণয় করুন।

- b) Determine the asymptotes of

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0.$$

$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$ -এর স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করুন।

- c) Find the range of values of x for which the values of $2x^3 - 9x^2 + 12x$ decreases as x increases.

x -এর মানের সেই 'range'-টি নির্ণয় করুন যেখানে x -এর মানের বৃদ্ধির ফলে $2x^3 - 9x^2 + 12x$ মান হ্রাস পায়।

15. a) Determine the existence and nature of the double point on the curve $(x - 2)^2 = y(y - 1)^2$.

$(x - 2)^2 = y(y - 1)^2$ বক্রটির উপর অবস্থিত দ্বি-বিন্দুর অস্তিত্ব ও প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

- b) Examine for extreme values of the function

$$x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2.$$

$x^2 + y^2 + (x + y + 1)^2$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মানের পরীক্ষা করুন।

- c) Prove that of all rectangular parallelopiped of same volume the cube has least surface area.

প্রমাণ করুন যে নির্দিষ্ট আয়তন বিশিষ্ট সমস্ত আয়তঘন-এর মধ্যে ঘনকেরই surface area ক্ষুদ্রতম।

GROUP - D

(Full Marks : 20)

বিভাগ - ঘ

(পূর্ণমান : ২০)

Answer Question No. 16 and any two from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে-কোনো দু'টি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any two questions :

যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Does the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ exist ?

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ -এর সমাকলনটির কি অস্তিত্ব আছে ?

- b) Evaluate $\iint xy(x + y) dx dy$ over the area bounded by $y = x^2$, $y = x$.

মান নির্ণয় করুন $\iint xy(x + y) dx dy$ যখন ক্ষেত্রটি $y = x^2$, $y = x$ দ্বারা সীমাবদ্ধ।

- c) Prove that $B(l, m) = B(m, l)$.

প্রমাণ করুন যে $B(l, m) = B(m, l)$.

d) Show that $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{32}$

দেখান যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta \, d\theta = \frac{\pi}{32}$

a) Apply μ test to study the convergence of the integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. 4

μ test প্রয়োগ করে $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ এর অভিসারিত্ব পরীক্ষা করুন।

b) Define the relation between Beta and Gamma function and hence prove that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. 4

Beta ও Gamma অপেক্ষক দুটির সম্পর্কটি লিখুন ও এর সাহায্যে প্রমাণ করুন যে $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

a) Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$
 4

দেখান যে, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \cos^n \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$

b) Evaluate : $\int_0^{\pi} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta \, d\theta \, dr$. 4

মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\pi} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta \, d\theta \, dr$

a) Find the area bounded by the parabola $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$. 4

$y^2 = 4ax$, $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তদুটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ?

- b) Find the length of the arc of the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta$ cut-off by its latus rectum.

$\frac{l}{r} = 1 + \cos \theta$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব দ্বারা ছেদিত চাপটির দৈর্ঘ্য কত ?

20. a) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$ about the initial line.

$r = a(1 - \cos \theta)$ ঘূর্ণায়মান cardioid দ্বারা উৎপন্ন solid টির আয়তন কত ?

- b) Find the surface area of a sphere of radius a units.

যে গোলকের ব্যাসার্ধ a একক তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

GROUP - E

(Full Marks : 10)

বিভাগ - ৫

(পূর্ণ মান : ১০)

21. Answer any one question :

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

- a) Find the complementary function of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x.$$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x$ অবকল সমীকরণটির পূরক অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

- b) Find the particular integral of the differential equation $(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}$.

$(D^2 + 2D + 2)y = xe^{-x}$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাকল নির্ণয় করুন।

- c) What do you mean by orthogonal trajectories of a given family of curves ?

কোন প্রদত্ত বক্র গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথ বলতে কি বোঝেন ?

22. Answer any two questions :

2 × 4 = 8

যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন :

a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$

সমাধান করুন : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$

b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$.

সমাধান করুন : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 2x$

c) Solve : $(D^2 - 1)y = 2$, given that $Dy = 3$ when $y = 1$ and $y = -1$ when $x = 2$.

সমাধান করুন : $(D^2 - 1)y = 2$, দেওয়া আছে, $Dy = 3$ যখন $y = 1$ এবং $y = -1$ যখন $x = 2$

d) Solve : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x^4$

সমাধান করুন : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x^4$